

עבודת קיץ במתמטיקה לכתה י' 4 יח"ל- 2016

שלום תלמידים,

צוות מורי המתמטיקה מברך אתכם, עם סיום שנת הלימודים.

על מנת להגיע לכיתה י' ברמת מוכנות טובה, מוגשת לכם בזה עבודת-קיץ.

בשבועיים הראשונים של שנה"ל הבאה יתקיים **מבחן**, שיתבסס על השאלות שלהלן.

הכנת העבודה והגשתה הן תנאי להיבחנות במבחן.

אלגברה

1. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א.

$$y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-2x}$$

תשובה: $x \geq 2$ או $-1 \leq x \leq 0$.

ב.

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+3x}} + \sqrt{-x^2+x+2}$$

תשובה: $0 < x \leq 2$.

ג.

$$y = \sqrt{\frac{1-4x}{2x-3}} + \sqrt{2x^2-3x+1}$$

תשובה: $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ או $1 \leq x < 1\frac{1}{2}$.

2.

מצא לאילו ערכי x שתי הפונקציות $y = \frac{x-1}{x+3}$ ו- $y = \frac{2x+8}{5-x}$ הן חיוביות.

תשובה: $1 < x < 5$ או $-4 < x < -3$.

3.

א. פתור את המשוואה $x^2 - (2a+1)x + a^2 + a - 2 = 0$.

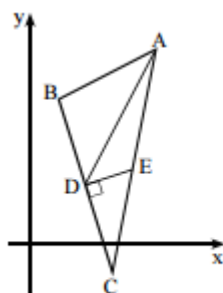
ב. מצא לאילו ערכי a שני השורשים של המשוואה הם:

(1) שניהם חיוביים. (2) שניהם שליליים. (3) בעלי סימנים הפוכים.

תשובה: א. $a-1, a+2$. ב. (1) $a > 1$. (2) $a < -2$. (3) $-2 < a < 1$.

גיאומטריה אנליטית

1.

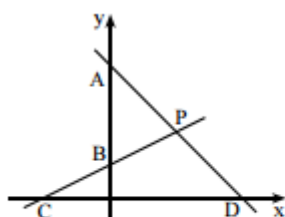


במשולש ABC DE הוא אנך אמצעי לצלע BC .
 משוואת התיכון AD היא $y = \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$.
 משוואת DE היא $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.
 משוואת הצלע AB היא $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.
 מצא את שיעורי הקדקודים A , B ו- C .
תשובה: $C(3; -1)$, $B(1; 5)$, $A(5; 7)$.

2.

במשולש ABC משוואת הצלע AB היא $y = 3x - 5$. נתון: $B(4; 7)$.
 משוואת התיכון CD לצלע AB היא $y = -x + 15$.
 א. מצא את שיעורי הקדקוד A . ב. הוכח: $S_{ADC} = S_{BDC}$.
תשובה: א. $(6; 13)$.

3.



בציור מתוארים הישרים AD ו- BC .
 הנחתים בנקודה $P(6; 6)$.
 משוואת הישר BC היא $y = mx + 3$.
 שטח המשולש ABP הוא 27 יח"ר.
 א. מצא את הערך של m .
 ב. חשב את שטח המרובע $BODP$.
 (O - ראשית הצירים).
תשובה: א. $\frac{1}{2}$. ב. 45 יח"ר.

4.

במעוין $ABCD$ האלכסון AC מונח על הישר $y = 2x - 8$, הצלע AB מונחת על הישר $y = -8x + 2$. אלכסוני המעוין נחתכים על ציר ה- x .
 א. מצא את קדקודי המעוין.
 ב. חשב את שטח המעוין.

תשובה: א. $A(1; -6)$, $B(0; 2)$, $C(7; 6)$, $D(8; -2)$. ב. 60.

5.

קדקודי המרובע $ABCD$ הם: $A(8; 6)$, $B(12; 4)$, $C(11; 1)$, $D(5; 4)$.
 א. הוכח שהמרובע הוא טרפז.
 ב. חשב את אורך הגובה היורד מקדקוד A לצלע DC .
 ג. חשב את שטח הטרפז.

תשובה: ב. $\sqrt{9.8}$. ג. 17.5.

אנליזה

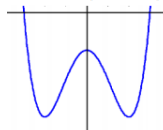
1.

בתרגילים הבאים עליך לחקור את הפונקציות הנתונות באופן מלא לפי הסעיפים:
 א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון וסוגן.
 ג. נקודות חיתוך עם הצירים. ד. תחומי עליה וירידה. ה. סקיצה של הפונקציה.

א. $y = x^4 - 8x^2 - 9$

תשובה:

א. לכל x . ב. $\text{Min}(-2, -25), \text{Max}(0, -9), \text{Min}(2, -25)$. ג. $(-3, 0), (0, -9), (3, 0)$. ד. עולה: $2 < x$ או $-2 < x < 0$; יורדת $0 < x < 2$ או $x < -2$. ה.

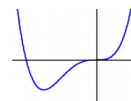


ב.

$y = x^4 + 4x^3$

תשובה:

א. לכל x . ב. $\text{Min}(-3, -27)$, פיתול $(0, 0)$. ג. $(-4, 0), (0, 0)$. ד. עולה: $-3 < x$; יורדת $x < -3$. ה.



ג.

$y = 5x^7 - 7x^5$

תשובה:

א. לכל x . ב. $\text{Min}(1, -2)$, פיתול $(0, 0)$, $\text{Max}(-1, 2)$. ג. $(-1.18, 0), (0, 0), (1.18, 0)$. ד. עולה: $x < -1$ או $1 < x$; יורדת: $-1 < x < 1$. ה.

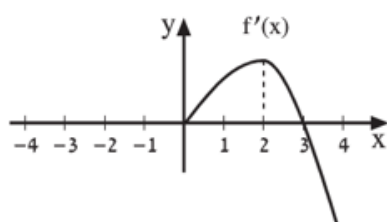


2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = ax^4 + bx^3$ בנקודה $(1, -5)$ הוא -12 .
 א. מצא את a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

3. לפונקציה $y = -x^3 - ax^2 + ax$ יש נקודת קיצון בנקודה $x = 2$.
 א. מצא את a .
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

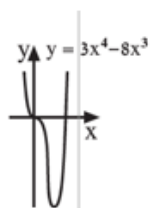
4. א. מצא בקטע $[-1, 2]$ מקסימום מקומי של הפונקציה $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ שאינו מוחלט.
 ב. מצא בקטע הנ"ל מינימום מקומי שאינו מוחלט.
 ג. הוכח: לכל $-1 \leq x \leq 2$ מתקיים $-4 \leq \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2 \leq 7\frac{1}{4}$.

5. הפונקציה $y = a^2x^4 - (a+3)x$ עולה בתחום $x > 1$ ויורדת בתחום $x < 1$.
 א. מצא את שני הערכים האפשריים של a .
 ב. הצב בפונקציה את ה- a הגדול מבין השניים ומצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 ג. שרטט בצורה כללית סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:
 (1) בשתי נקודות. (2) בנקודה אחת. (3) באף נקודה.



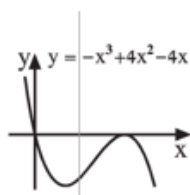
6. $f(x)$ היא פונקציה שהתחום שלה הוא $-4 \leq x \leq 4$. בשרטוט מתואר הגרף של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 4$. נתון ש- $f'(x)$ היא פונקציה אי זוגית בתחום $-4 \leq x \leq 4$.
 א. שרטט את הגרף של $f'(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 0$.
 ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה $f(x)$.
 ג. נתון: $f(x) > 0$ לכל x בתחום $-4 \leq x \leq 4$, $f(-3) = 2$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 4$.
 ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f''(x)$ בתחום $-4 \leq x \leq 4$.

תשובות:



2.

- א. $b = -8, a = 3$
 ב. $(2, -16)$ מינימום.
 ג. עולה: $x > 2$
 ד. יורדת: $x < 2$



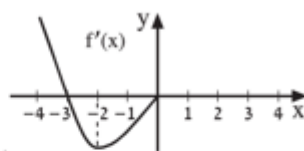
3.

- א. -4 . ב. $(2, 0)$ מקסימום.
 ג. $(\frac{2}{3}, -1\frac{5}{27})$ מינימום. עולה:
 ד. $\frac{2}{3} < x < 2$ יורדת: $x < \frac{2}{3}$ או $x > 2$.
 ה. $(2, 0), (0, 0)$

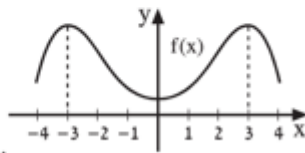
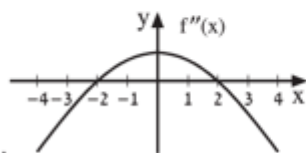
4. א. $1\frac{1}{4}$ ב. 0

5. א. $a = 1$ או $a = -\frac{3}{4}$. ב. $(1, -3)$ מינימום. ד. $k > -3$ (1) $k = -3$ (2) $k < -3$ (3)

6.

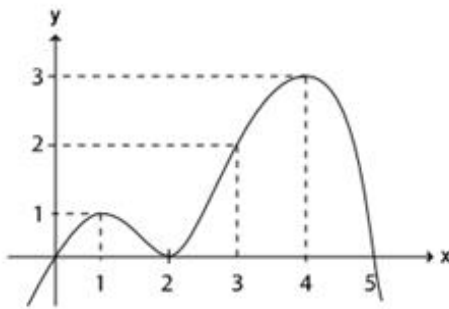


א. ב. $x = 3$ מקסימום, $x = 0$ מינימום, $x = -3$

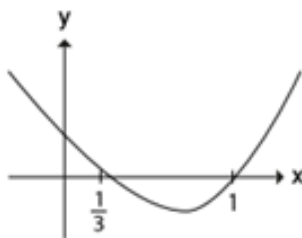


ג. מקסימום. ד.

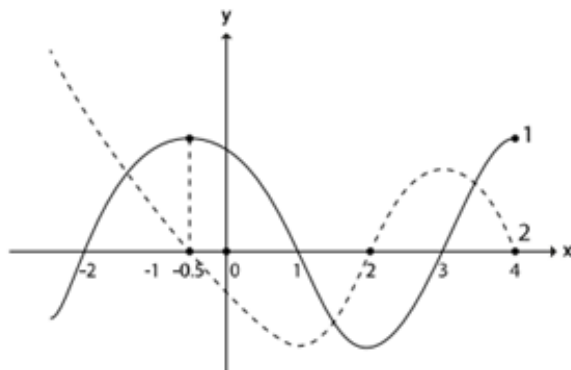
גרף הנגזרת- המשך אנליזה



1. נתון שרטוט של גרף הנגזרת $f'(x)$. מצא את:
 - א. שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של גרף $f(x)$ ואת סוגן.
 - ב. תחומי העלייה והירידה של גרף $f(x)$.
 - ג. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(3,5)$ הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.



2. עבור הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 + mx$ נתון גרף הנגזרת $f'(x)$. מצא את:
 - א. ערכו של הפרמטר m .
 - ב. נקודות הקיצון של הפונקציה ואת סוגן.



3. בשרטוט מופיעים הגרפים של הנגזרת הראשונה $f'(x)$ ושל הנגזרת השנייה $f''(x)$.
 - א. קבע איזה גרף, 1 או 2, הוא גרף $f'(x)$. נמק.
 - ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 - ג. מצא כמה נקודות מינימום יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המופיע בשרטוט.

פתרונות:

1. א. נקודת min כאשר $x = 0$, נקודת max כאשר $x = 5$. (כאשר $x = 2$ מתקבלת נקודת פיתול).
 ב. עליה: $0 < x < 2$ או $2 < x < 5$. הפונקציה אינה יורדת כלל בתחום הנתון: $0 \leq x \leq 5$.
 ג. $y = 2x - 1$.

2. א. $m = 1$. ב. $\text{Max}\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$, $\text{Min}(1, 0)$.

3. א. גרף 1. ב. עולה: $3 < x < 4$ או $-2 < x < 1$. ירידה: $1 < x < 3$ או $x < -2$. ג. שתיים.

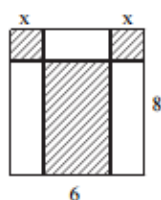
בעיות קיצון- המשך אנליזה

1.

מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית. מצא גם את המכפלה המקסימלית.

תשובה: 4, 6, 3456.

2.

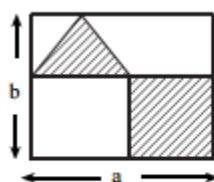


בחלון מלבני שממדיו 8 מטרים ו-6 מטרים רוצים להרכיב זכוכית משני סוגים: בשטחים המקווקווים המורכבים משני ריבועים שצלעם x וממלבן נוסף רוצים להרכיב זכוכית צבעונית, ובשטחים הלבנים שבציור רוצים להרכיב זכוכית שקופה (ראה ציור). א. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הזכוכית השקופה יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של הזכוכית השקופה?

תשובה: א. 2.75 מטר. ב. 30.25 מ"ר.

3.

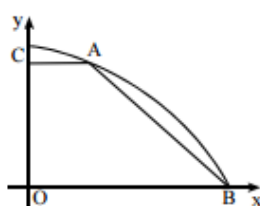


בתוך מלבן שאורכו a ורוחבו b חסומים ריבוע ומשולש מקווקווים.

מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של הריבוע והמשולש יהיה מינימלי? הבע על ידי a ו- b .

תשובה: $\frac{a+b}{6}$.

4.

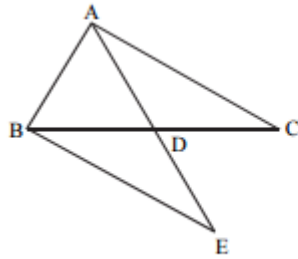


נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y = -x^2 + 81$ ברביע הראשון. הקטע AC מקביל לציר ה- x . מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ישר-הזווית ABOC יהיה מקסימלי.

תשובה: (3; 72).

גיאומטריה

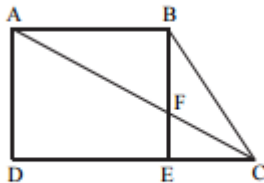
1.



- הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC, כך ש- $\angle ADB < 90^\circ$.
נקודה E נמצאת על המשך הקטע AD כך שמתקיים $AD = DE$, $AC = BE$.
א. הוכח: AD תיכון ל-BC במשולש ABC.
ב. הוכח: $S_{ABD} = S_{BDE}$.

רמז: השתמש במשפט חפיפה רביעי

2.

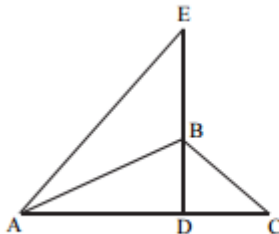


לפניך טרפז ישר-זווית ABCD ($\angle ADC = 90^\circ$, $AB \parallel DC$).

- BE הוא הגובה לבסיס DC.
האלכסון AC חוצה את הגובה BE בנקודה F.
נתון: $\frac{BC}{EC} = 2$, $S_{EFC} = 4$ סמ"ר.
א. חשב את שטח המשולש ABF.
ב. חשב את שטח המלבן ABED.

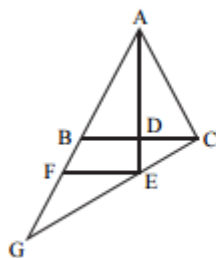
תשובה: א. 16 סמ"ר. ב. 48 סמ"ר.

3.



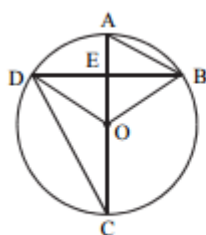
- במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD.
נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD, כך ש-AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).
נתון: $\angle BCA = 2 \cdot \angle BAC$.
א. הוכח: $BC \cdot ED = BD \cdot EA$.
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א', והוכח: $BC \cdot ED = AD \cdot BE$.

4.



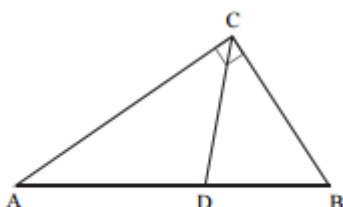
- הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל-BC.
נתון: $\frac{GF}{BF} = \frac{AG}{AC}$. הוכח: $AE \perp BC$.

5.



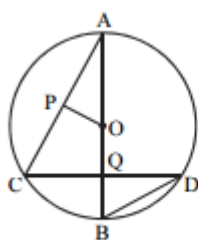
- AC הוא קוטר ו-BD הוא מיתר
 במעגל שמרכזו O.
 נתון: $BD \perp AC$.
 א. הוכח: $S_{ABO} = S_{DOC}$.
 ב. הוכח: $S_{ABOD} = S_{ADC}$.

6.



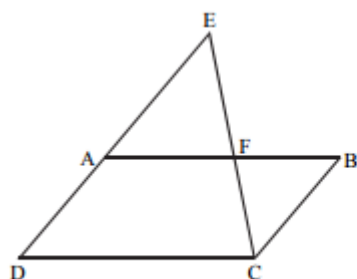
- במשולש ישר-זווית ACB ($\angle ACB = 90^\circ$)
 CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).
 א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.
 (2) נתון: $BC = 21$ מ"מ, $AC = 28$ מ"מ.
 חשב את האורך של הקטע DB.
 ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB.
 האנך חותך את היתר
 בנקודה N. הוכח כי $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$.
 ג. חשב את האורך של הקטע DN.
תשובה: א. (2) 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.

7.



- AB הוא קוטר במעגל O.
 AC ו-CD הם מיתרים שווים במעגל.
 נתון: P אמצע המיתר AC,
 Q אמצע המיתר CD.
 א. הוכח: $\triangle APO \cong \triangle DQB$.
 ב. הוכח: $OQ = BQ$.

8.



המרובע ABCD הוא מקבילית (ראה ציור).

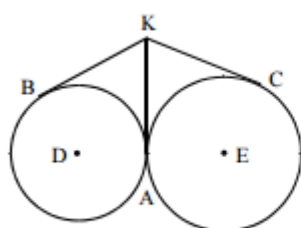
א. הוכח: $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}$

(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1),

והוכח: $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AEF}$

9.



המעגלים D ו-E משיקים זה לזה בנקודה A.

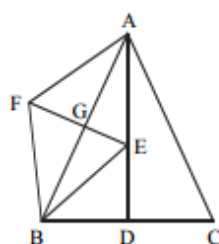
הקטע BK משיק למעגל D.

הקטע CK משיק למעגל E.

הקטע AK משיק לשני המעגלים.

א. הוכח: $BK = CK$

ב. הוכח: הנקודה A נמצאת על הקטע DE.



10. AD הוא גובה לבסיס BC במשולש שווה-שוקיים

ABC ($AB = AC$). E היא נקודה על AD כך

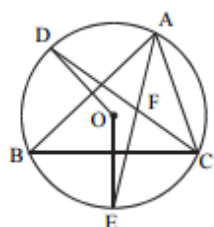
שהמרובע AEBF הוא דלתון ($AE = BE$, $AF = BF$).

א. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל

החוסם את המשולש ABC.

ב. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל

החוסם את המשולש ABD.



11. במעגל שמרכזו בנקודה O נתון:

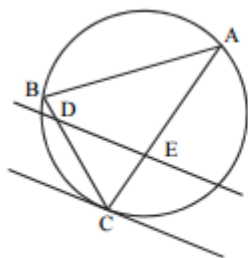
הרדיוס OD מאונך למיתר AB

והרדיוס OE מאונך למיתר BC.

הוכח: הנקודה F היא מרכז המעגל

החוסם בתוך המשולש ABC.

.12



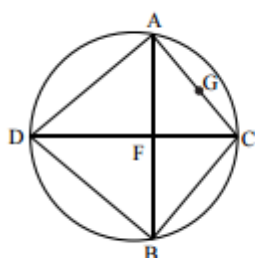
המשולש ABC חסום במעגל. E היא נקודה על צלע AC. דרך הנקודה E העבירו מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה C.

א. הוכח: $\triangle DEC \sim \triangle ABC$.

ב. נתון: $2 \text{ ס"מ} = BD$, $6 \text{ ס"מ} = DC$, $AE = 2EC$, שטח המשולש ABC הוא S. הבע באמצעות S את שטח המשולש DEC.

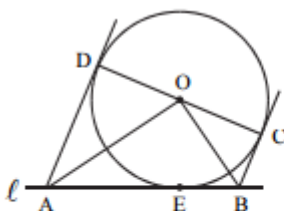
תשובה: $\frac{1}{4}S$.

.13



A, B, C ו-D הן נקודות על מעגל.
 המיתרים AB ו-CD נחתכים בנקודה F
 (ראה ציור). נתון: $\angle DAC = \angle DBC$.
 א. הוכח כי DC הוא קוטר.
 ב. נתון גם: $\angle ACD = \angle BCD$.
 הוכח: $AB \perp CD$
 ג. נקודה G נמצאת על AC כך ש- $GF = AG$.
 הוכח: $GF = GC$

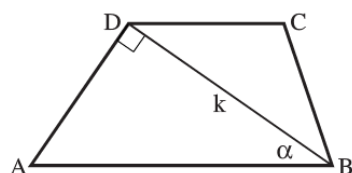
.14



מעגל O שרדיוסו 6 ס"מ משיק לישר ℓ בנקודה E. CD הוא קוטר במעגל. BC משיק למעגל בנקודה C ו-AD משיק למעגל בנקודה D. נתון: $13 \text{ ס"מ} = AB$, $BE < AE$.
א. הוכח: $\angle AOB = 90^\circ$.
ב. חשב את אורכי הקטעים BE ו-AE.
תשובה: ב. 4 ס"מ, 9 ס"מ.

טריגונומטריה

1.

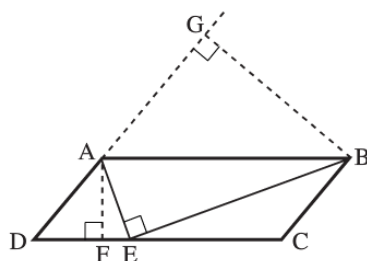


בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) האלכסון BD מאונך לשוק AD וחוצה את זווית ABC . נתון: $BD = k$, $\angle ABD = \alpha$.

א. הבע בעזרת k ו- α את אורכי הבסיסים AB ו- DC .
ב. הוכח שהבסיס AB גדול פי 2 מהבסיס DC ללא תלות בזווית α .

ג. הוכח ששטח הטרפז הוא $\frac{3}{4}k^2 \tan \alpha$. (הדרכה: היעזר בזהות $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$).
ד. מצא את α אם שטח הטרפז שווה ל- $\frac{1}{2}k^2$.

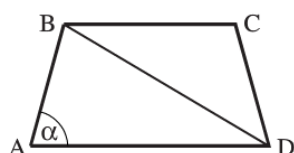
2.



במקבילית $ABCD$ הנקודה E נמצאת על הצלע DC כך ש- $\angle AEB = 90^\circ$. נתון: $\angle ABE = 20^\circ$, $\angle ADC = 50^\circ$, $AD = 10$ ס"מ.

מצא את הגובה AF ואת הגובה BG .

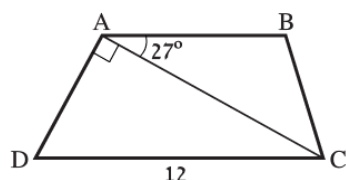
3.



בטרפז שווה שוקיים $ABCD$ ($BC \parallel AD$) ($AB = CD$) אורך הבסיס הגדול AD שווה לאורך האלכסון. זווית הבסיס היא α ($\alpha > 60^\circ$).

בטא באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש BCD לשטח המשולש ABD .

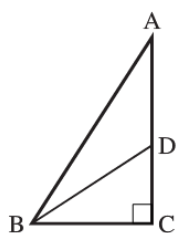
4.



בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) האלכסון AC מאונך לשוק הטרפז AD . נתון: $DC = 12$ ס"מ, $\angle BAC = 27^\circ$.

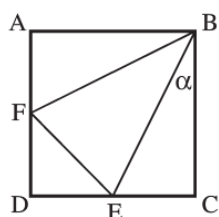
א. חשב את השוק AD ואת גובה הטרפז.
ב. נתון: $AB = 7$ ס"מ. חשב את שטח הטרפז.

5.



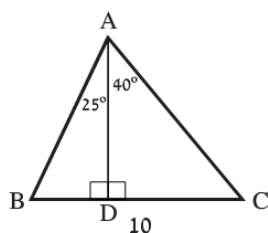
במשולש ישר זווית ABC ($\angle C = 90^\circ$) הנקודה D נמצאת על הניצב AC . נתון: $AB = 2AD$, $\tan(\angle ABC) = \frac{4}{3}$.
א. חשב את הזווית DBC .
ב. מה ניתן לומר על הקטע BD ?

6.



בתוך ריבוע $ABCD$ שצלעו a חסום משולש שווה שוקיים BEF שהשוק BE שלו יוצרת זווית α עם הצלע BC של הריבוע.
א. הסבר מדוע הזווית ABF שווה ל- α .
ב. הבע באמצעות a ו- α את שטח המשולש BEF .
ג. נתון: $\alpha = 30^\circ$. חשב בעזרת התוצאה של סעיף ב' איזה חלק מהווה שטח המשולש BEF משטח הריבוע $ABCD$.

7.



AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC .
(הגובה עובר בתוך המשולש). נתון:
 $\angle BAD = 25^\circ$, $\angle CAD = 40^\circ$, $BC = 10$ ס"מ.
חשב את שטח המשולש ABC בעזרת הצלע BC והגובה שלה AD .

תשובות:

1.

$$א. \frac{k}{\cos \alpha}, \frac{k}{2 \cos \alpha} \quad ד. 33.69^\circ$$

2.

$$7.66 \text{ ס"מ}, 18.26 \text{ ס"מ}$$

3.

$$\left(\frac{2 \cos \alpha \sin(3\alpha - 180^\circ)}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \quad \text{או} \quad \frac{\sin(3\alpha - 180^\circ)}{\sin \alpha} \right)$$

.4

א. 5.45 ס"מ, 4.85 ס"מ. ב. 46.11 סמ"ר.

.5

א. 26.57° . ב. חוצה הזווית ABC.

.6

ב. $\frac{a^2 \sin(90^\circ - 2\alpha)}{2\cos^2 \alpha}$ או $\left(\frac{a^2 \cos 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} \right)$ ג. $\frac{1}{3}$.

.7

38.30 סמ"ר.