

ז. חקירת פונקציות מנה המכילות ביטויים עם שורשים ריבועיים

תרגילים לעבודה עצמית

נגזרות ומשיקים: תרגילים עם ובלי פרמטרים

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{6 - \sqrt{x}}{6 + \sqrt{x}}$$

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?
 (ב) חשב את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 16$.
 (ג) מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 16$.

$$(2) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right)^3$$

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?
 (ב) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $A(9, -8)$.
 (ג) מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה A והמאונך למשיק מסעיף (ב).

$$(3) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{x - 3}$$

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?
 (ב) בנקודה על גרף הפונקציה שבה $x = 4$ העבירו משיק לגרף הפונקציה. מצא את משוואת המשיק.

$$(4) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{\sqrt{x} - a}{2x + 1}$$

- (א) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?
 (ב) מהן משוואות האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים ?
 (ג) מצא את ערכו של הפרמטר a אם ידוע כי: $f'(1) = \frac{1}{2}$.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}$ (הוא מספר שלם).

(א) מצא את ערכו של הפרמטר a אם מתקיים: $f'(4) = 1\frac{1}{2}$.

(ב) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(ג) מהן האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים?

חקירה מלאה של פונקציות עם שורשים: תרגילים ללא פרמטרים

הצביך: כחקירת פונקציות שתחום ההגדרה הוא קטע סגור לא שהוא אינך קטע סגור יש להתייחס בתשוכות וכספית f נקודות קיצון גם לנקודות הקצה ולסוגן כאקואי או אחלטה

חקור את הפונקציות שבתרגילים (6) – (9) לפי השלבים הבאים:

(א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ב) מצא את משוואות האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים.

(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(ד) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(ה) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש).

(ו) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{0.5x}{2 - \sqrt{x}} \quad (7) \quad f(x) = \frac{\sqrt{2x + x^2}}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} \quad (9) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} \quad (8)$$

חקור את הפונקציות שבתרגילים (10) – (13) לפי השלבים הבאים:

(א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ב) מצא את משוואות האסימפטוטות של גרף הפונקציה המקבילות לצירים.

(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, קבע את סוגן

ורשום את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.

(ד) מצא את נקודות הפיתול של הפונקציה,

ורשום את תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה.

(ה) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש).

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-4} \quad (11) \qquad f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x}} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2} \quad (13) * \qquad f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x} \quad (12)$$

חקירה מלאה של פונקציות עם שורשים: חוגילים עם פרמטרים

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x}}{A+x \cdot \sqrt{x}}$

- (א) לפונקציה יש נקודת קיצון פנימית בנקודה שבה $x = 1$. מצא את A.
- (ב) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- (ג) מהי משוואת האסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה?
- (ד) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- (ה) מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
- (ו) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.
- (ז) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- (ח) עבור אילו ערכים של k , לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה $f(x)$:
 - (i) יש בדיוק שתי נקודות משותפות?
 - (ii) יש בדיוק נקודה משותפת אחת?
 - (iii) אין אף נקודה משותפת?

(15) נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^2}{x-2a \cdot \sqrt{x}} \quad (a > 0)$

- ענה על הסעיפים הבאים (הבע תשובותיך באמצעות הפרמטר a):
- (א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (ב) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 - (ג) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - (ד) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - (ה) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
 - (ו) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(16) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \frac{x+b}{\sqrt{x^2-9}}$$

גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- x (שעוברת מתחת לציר ה- x) בנקודה שבה: $x = -5$.

(א) מצא את b .

(ב) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ג) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

(ד) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(ה) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \frac{x+3a}{\sqrt{x+a}} \quad (a > 0)$$

(א) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(ב) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(ג) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(ד) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ורשום את תחומי העלייה והירידה.

(ה) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$(18) \text{ לפונקציה: } y = \frac{x}{a-\sqrt{x}} \text{ יש נקודת פיתול ב- } x = 9$$

(א) מצא את a ואת נקודת הפיתול.

(ב) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.

(ג) מצא את נקודות הקיצון והאסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה: } y = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} + b \quad (b < 3)$$

(א) מצא את b אם נתון שהישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה.

(ב) הסבר מדוע הפונקציה מוגדרת עבור כל ערך של x .

(ג) הוכח שהפונקציה מונוטונית עולה.

(ד) מצא את נקודות הפיתול ורשום את תחומי הקעירות

כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.

(ה) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות

(1) (א) $x \geq 0$ (ב) שיפוע המשיק הוא $-\frac{3}{200} = -0.015$

(ג) $(0, 0.44)$, $(\frac{88}{3}, 0)$ (ברישום שקול: $(29\frac{1}{3}, 0)$)

(2) (א) $x \neq 1$, $x \geq 0$

(א) $y = -x + 1$

(ב) $y = x - 17$

(ב) $y = -2.5x + 13$

(א) $x \neq 3$, $x \geq 0$

(א) $a = 2.5$

(ב) $y = 0$ (א) $x \geq 0$

(5) (א) $y = -1$, $x = 9$ (ב) $x \neq 9$, $x \geq 0$ (א) $a = 3$

(6) (א) $x > 0$, $x \leq -2$

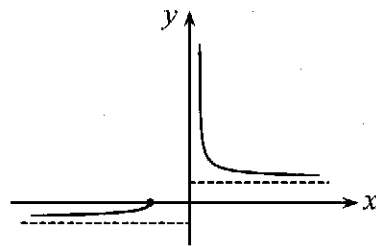
(ב) $y = -1$, $y = 1$, $x = 0$

(ג) $\max(-2, 0)$

(ד) עלייה: $x \leq -2$. ירידה: $x > 0$

(ה) $(-2, 0)$

(ו) ראה סקיצה משמאל:



(7) (א) $x \neq 4$, $x \geq 0$

(ב) $x = 4$

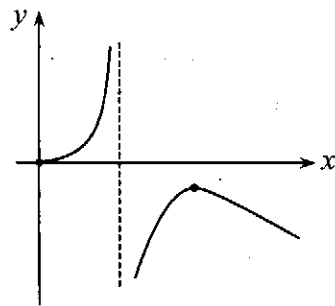
(ג) $\max(16, -4)$, $\min(0, 0)$

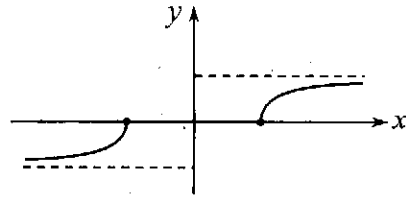
(ד) עלייה: $0 \leq x < 4$, $4 < x < 16$

ירידה: $x > 16$

(ה) $(0, 0)$

(ו) ראה סקיצה משמאל:





(8) (א) $x \leq -2$, $x \geq 2$

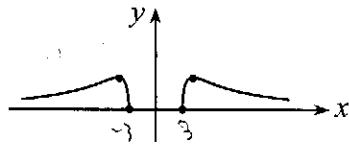
(ב) $y = -1$, $y = 1$

(ג) $\max(-2, 0)$, $\min(2, 0)$

(ד) עלייה: $x \leq -2$, $x \geq 2$

(ה) $(2, 0)$, $(-2, 0)$

(ו) ראה סקיצה משמאל:



(9) (א) $x \leq -3$, $x \geq 3$

(ב) $y = 0$

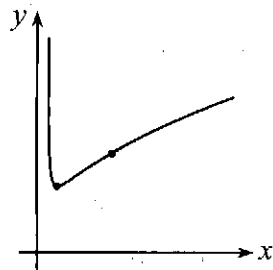
(ג) $\min(-3, 0)$, $\min(3, 0)$

$\max(-3 \cdot \sqrt{2}, \frac{1}{6})$, $\max(3\sqrt{2}, \frac{1}{6})$

(ד) עלייה: $3 \leq x < 3\sqrt{2}$, $x < -3\sqrt{2}$

ירידה: $x > 3\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2} < x \leq -3$

(ה) $(3, 0)$, $(-3, 0)$ (ו) ראה סקיצה משמאל:



(ב) $x = 0$

(א) (10) $x > 0$

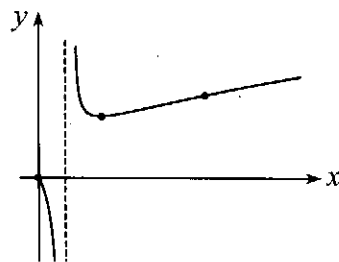
(ג) $\min(4, 4)$

עלייה: $x > 4$. ירידה: $0 < x < 4$

(ד) $(12, \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3})$

$x > 12 \cap$; $0 < x < 12 \cup$

(ה) אין נקודות חיתוך. (ו) ראה סקיצה משמאל:



(11) (א) $x \neq 16$, $x \geq 0$ (ב) $x = 16$

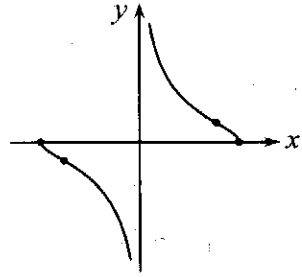
(ג) $\min(64, 16)$, $\max(0, 0)$

עלייה: $x > 64$

ירידה: $16 < x < 64$, $0 < x < 16$

(ד) $16 < x < 144 \cup (144, 18)$

$x > 144 \cap 0 < x < 16 \cap$



(א) (12) $x \neq 0, -4 \leq x \leq 4$

(ב) $x = 0$

(ג) $\max(-4, 0), \min(4, 0)$

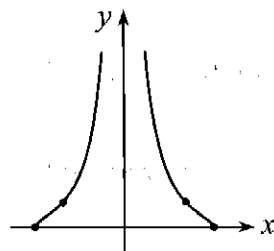
ירידה: $0 < x \leq 4, -4 \leq x < 0$

(ד) $(\frac{4}{3} \cdot \sqrt{6}, \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}), (-\frac{4}{3} \cdot \sqrt{6}, -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2})$

$0 < x < \frac{4}{3} \cdot \sqrt{6}, -4 < x < -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{6} \cup$

$\frac{4}{3} \cdot \sqrt{6} < x < 4, -\frac{4}{3} \cdot \sqrt{6} < x < 0 \cap$

(ה) $(4, 0), (-4, 0)$ ראה סקיצה משמאל:



(א) (13) $x \neq 0, -5 \leq x \leq 5$ (ב) $x = 0$

(ג) $\min(5, 0), \min(-5, 0)$

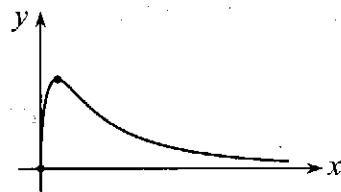
ירידה: $0 < x \leq 5$. עלייה: $-5 \leq x < 0$

(ד) $(4.51, 0.11), (-4.51, 0.11)$

$0 < x < 4.51, -4.51 < x < 0 \cup$

$4.51 < x < 5, -5 < x < -4.51 \cap$

(ה) $(5, 0), (-5, 0)$ ראה סקיצה משמאל:



(א) (14) $A = 2$ (ב) $x \geq 0$

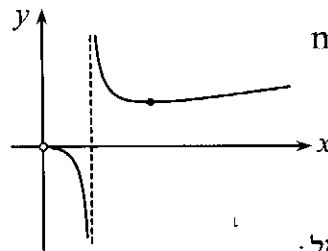
(ג) $y = 0$ (ד) $(0, 0)$

(ה) $\max(1, \frac{2}{3}), \min(0, 0)$

(ו) עלייה: $0 \leq x < 1$. ירידה: $x > 1$

(ז) ראה סקיצה משמאל:

(ח) (i) $0 < k < \frac{2}{3}$ (ii) $k = \frac{2}{3}, k = 0$ (iii) $k > \frac{2}{3}, k < 0$



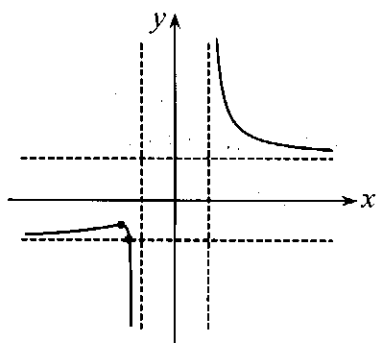
(א) (15) $x > 0, x \neq 4a^2$ (ב) $\min(9a^2, 27a^2)$

(ג) עלייה: $x > 9a^2$

ירידה: $4a^2 < x < 9a^2, 0 < x < 4a^2$

(ד) אין נקודות חיתוך.

(ה) $x = 4a^2$ (ו) ראה סקיצה משמאל:



(א) (16) $b=1$

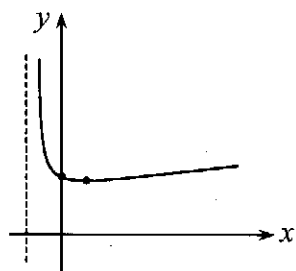
(ב) $x < -3, x > 3$

(ג) $\max(-9, -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{2})$

(ד) $y = -1, y = 1$

$x = -3, x = 3$

(ה) ראה סקיצה משמאל:



(א) (17) $x > -a$

(ב) $(0, 3\sqrt{a})$

(ג) $x = -a$

(ד) $\min(a, 2\sqrt{2a})$

עלייה: $x > a$. ירידה: $-a < x < a$.

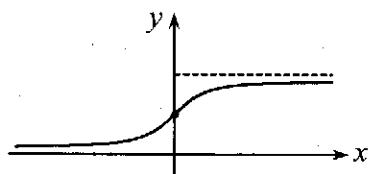
(ה) ראה סקיצה משמאל:

(א) (18) $a=1$, נקודת פיתול: $(9, -4.5)$

(ב) $1 < x < 9 \cap ; 0 < x < 1, x > 9 \cup$

(ג) נקודות קיצון: $\max(0,0), \min(4,4)$

אסימפטוטה: $x=1$



(א) (19) $b=1$

(ד) $(0,1)$

$x < 0 \cup$

$x > 0 \cap$

(ה) ראה סקיצה משמאל: