נגזור את הפונקציה ונקבל: $S'(x)=4+\dfrac{8\cdot(12-x)\cdot(-1)\cdot x-1\cdot 4\cdot(12-x)^2}{x^2}$

נשווה את הנגזרת לאפס: $4+\dfrac{8\cdot(12-x)\cdot(-1)\cdot x-1\cdot 4\cdot(12-x)^2}{x^2}=0 \quad /\cdot x^2$

$$4x^2-8x\cdot(12-x)-4\cdot(12-x)^2=0$$

לאחר פישוטים אלגבריים מתקבלת המשוואה: $x^2=72$

שפתרונה הוא: $\boldsymbol{x=\sqrt{72}}$ (הפתרון $x=-\sqrt{72}$ נדחה).

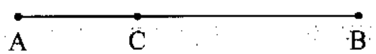
נותר להראות שסכום שטחי המשולש הוא אכן **מינימלי**. ניעזר בטבלת חקירה.

	$0<x<\sqrt{72}$	$x=\sqrt{72}$	$\sqrt{72}<x<12$
$S'(x)$	$S'(8)=-1$	$S'(\sqrt{72})=0$	$S'(9)=\frac{8}{9}$
	$-$	0	$+$
מסקנות לגבי $S(x)$	↘	min	↗

על-כן, כאשר $\sqrt{72}$ ס"מ $=\mathrm{BM}$ סכום שטחי המשולשים **מינימלי**.

<u>שאלות לעבודה עצמית</u>

בעיות ערך קיצון	בעיות הקשורות לתנועה



(1) המרחק AC שווה ל- 10 ק"מ.
המרחק CB שווה ל- 20 ק"מ.
מכונית עוברת את הדרך AC במהירות קבועה של $(48-x)$ קמ"ש כאשר $0<x<48$ ואת הדרך CB במהירות קבועה של $(48+2x)$ קמ"ש. מצא מה צריך להיות ערכו של x כדי שסך כל זמן הנסיעה מ- A ל- B יהיה מינימלי.

בעיות ערך קיצון	בעיות מספרים

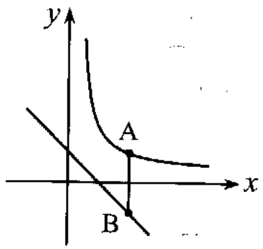
(2) נתונים שני מספרים חיוביים: $x>0$ ו- $y>0$ המקיימים: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.
מצא את הערך המינימלי שיכולה לקבל המכפלה $x\cdot y$.

(4) נתונים שני מספרים חיוביים: $x>0$ ו- $y>0$ המקיימים: $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=2$.
(א) מצא את הערך המינימלי שיכולה לקבל המכפלה $x\cdot y$.
(ב) מצא את הערך המינימלי של הסכום $x+y$.

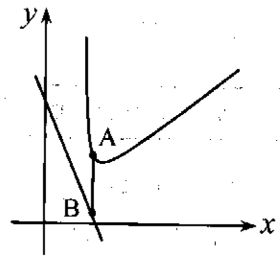
(5) נתונים שני מספרים חיוביים: $x>0$ ו- $y>0$ המקיימים: $y-x=2$.
מה צריכים להיות שני המספרים כדי שהמנה: x/y^2 תהיה מקסימלית?

(6) נתונים שני מספרים ממשיים: $x<0$ ו- $y>0$
המקיימים: $x+y=4$.
מה צריכים להיות שני המספרים כדי שהמנה: $\frac{1+x^2}{y^2}$ תהיה מינימלית?

בעיות ערך קיצון	בעיות עם פונקציות וגרפים

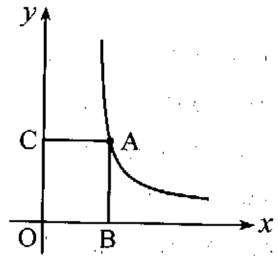


(7) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{8+x}{x-1}$
בתחום $x>1$, והישר שמשוואתו $y=-x+3$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על הישר, באופן שבו הקטע
AB מקביל לציר ה- y.
(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B שעבורן
אורך הקטע AB הוא מינימלי. מהו אורך המינימלי של הקטע AB?
(ב) הוכח שהמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$
בנקודה A מסעיף (א) מקביל לישר הנתון.



(8) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-4}$
בתחום $x>4$, והישר שמשוואתו $y=-3x+16$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$
והנקודה B נמצאת על הישר, באופן שבו הקטע
AB מקביל לציר ה- y.
(א) מצא את שיעורי הנקודות A ו- B שעבורן
אורך הקטע AB הוא מינימלי. מהו אורך המינימלי של הקטע AB?

(9) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$

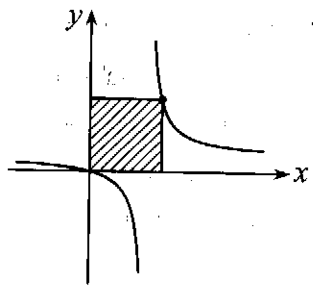


בתחום $x>2$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון. מורידים מהנקודה A אנכים לצירים, כך שנוצר מלבן ABOC (כמתואר בציור).

(א) מצא את שיעורי הנקודה A שעבורה היקף המלבן ABOC יהיה מינימלי ?

(ב) חשב את ההיקף של המלבן בעל ההיקף המינימלי.

(10) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-1}$

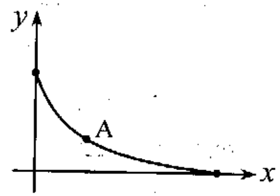


בין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y (ברביע הראשון), חוסמים מלבן (כך שאחד מקדקודיו נמצא בראשית הצירים).

(א) מצא את היקף המלבן בעל ההיקף המינימלי.

(ב) מצא את שטח המלבן בעל השטח המינימלי.

(11) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{13-x}{x+3}$

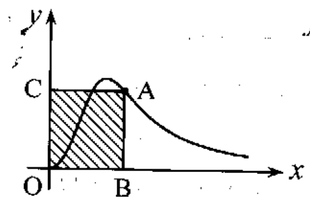


בתחום: $0\le x\le 13$. בתחום הנ"ל בוחרים נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה.

(א) מצא את שיעורי הנקודה A שסכום השיעורים שלה הוא מינימלי.

(ב) מצא את שיעורי הנקודה A שסכום השיעורים שלה הוא מקסימלי.

(12) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x^4+27}$



בתחום: $x\ge 0$. בתחום הנ"ל בוחרים נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה. דרך הנקודה A מורידים אנכים לצירים, כך שנוצר המלבן ABOC. מצא את שיעורי

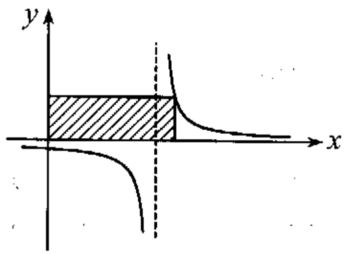
(13) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x^2+6}$.

(א) מצא את שיעור ה- x של הנקודה על גרף הפונקציה, שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא המקסימלי. מצא גם את משוואת המשיק.

(ב) מצא את שיעור ה- x של הנקודה על גרף הפונקציה, שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא המינימלי. מצא גם את משוואת המשיק.

(ג) הראה ששני המשיקים שמצאת נחתכים על ציר ה- y .

(14) נתונה הפונקציה : $y=\frac{x}{x-a}$ $(a>0)$.



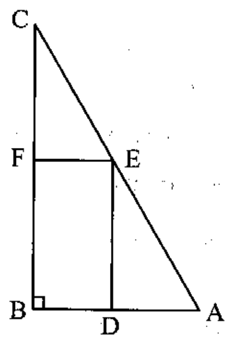
בין גרף הפונקציה והצירים ברביע הראשון חסום מלבן. ידוע שהשטח המינימלי של המלבן הוא 36 .

(א) מצא את a .

(ב) מצא את ההיקף המינימלי של המלבן עבור הערך של a שמצאת בסעיף (א).

בעיות ערך קיצון	בעיות גיאומטריות במישור

(15) נתון משולש ישר-זווית ΔABC $(\angle B=90^\circ)$.



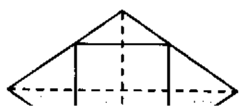
דרך נקודה E הנמצאת על היתר, העבירו אנכים לניצבים של המשולש כך שנוצר מלבן DEFB (ראה ציור). נתון : DE = 16 ס״מ, EF = 9 ס״מ .

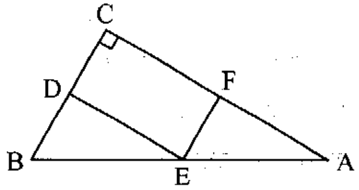
(א) סמן : $AD=x$. הבע את CF באמצעות x .

(ב) חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים של המשולש כדי ששטחו יהיה מינימלי.

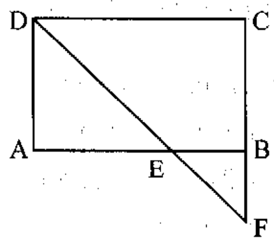
(ג) חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים של המשולש כדי שסכומם יהיה מינימלי.

(16) בתוך מעוין חסום ריבוע שאורך הצלע שלו 12 ס״מ, באופן שבו אלכסוני המעוין מקבילים

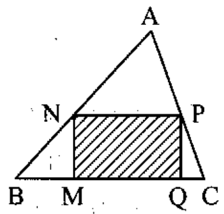




(17) נתון משולש ישר-זווית ΔABC ($\measuredangle C = 90°$)
שבו: $\measuredangle A = 30°$ ו- 12 ס"מ $= AB$.
המרובע $EFCD$ הוא מלבן החסום במשולש
(צלעות המלבן מקבילות לניצבים של המשולש).
(א) סמן: $EF = x$. הבע באמצעות x את ED.
(ב) עבור איזה ערך של x, שטח המלבן $EFCD$ יהיה מקסימלי?

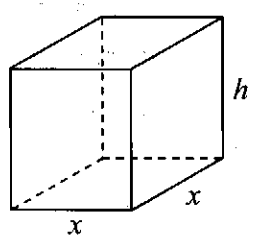


(18) נתון מלבן $ABCD$ ובו: 10 ס"מ $= AD$
ו- 16 ס"מ $= AB$. E היא נקודה כלשהי
על הצלע AB. הישר DE חותך את המשך
הצלע CB בנקודה F.
(א) סמן: $AE = x$.
הבע את BF באמצעות x.
(ב) מצא את אורך הקטע AE שעבורו סכום שטחי
המשולשים ΔADE ו- ΔBEF הוא מינימלי.

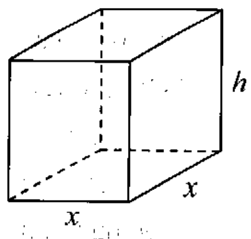


(19) בתוך המשולש ΔABC חסום מלבן $NMQP$
שצלעותיו הן: 5 ס"מ $= NP$, 4 ס"מ $= MN$.
חשב את שטחו של המשולש בעל השטח המינימלי
החוסם את המלבן.

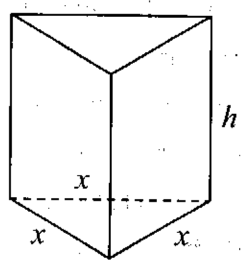
בעיות ערך קיצון	בעיות גיאומטריות במרחב



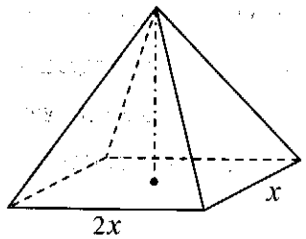
(20) נתונה תיבה מפח, פתוחה מלמעלה, שנפחה 13.5
סמ"ק ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x.
(א) הבע את גובה התיבה h ואת שטח הפח
ממנו עשויה התיבה P באמצעות x.
(ב) מצא מה צריכים להיות מקצועות התיבה
כדי ששטח הפח P הדרוש יהיה מינימלי.



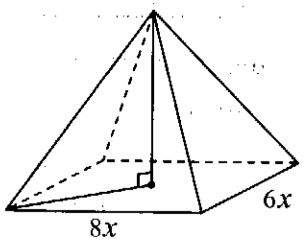
(21) מחוט תיל בונים מסגרת של תיבה שבסיסה ריבוע.
נפח התיבה הוא $8,000$ מ"ק.
(א) סמן ב- x את צלע בסיס התיבה והבע
באמצעות x את גובה התיבה h
ואת אורך חוט התיל הדרוש ℓ .
(ב) מה צריך להיות אורך מקצוע הבסיס
כדי שאורך החוט ℓ יהיה מינימלי ?
(ג) חשב את אורך החוט המינימלי.



(22) מחוט תיל בונים מסגרת של מנסרה ישרה שבסיסה
משולש שווה-צלעות שאורך צלעו x . שטח מעטפת
המנסרה הוא 24 סמ"ר.
(א) הבע באמצעות x את אורך גובה המנסרה h
ואת אורך חוט התיל הדרוש ℓ .
(ב) מצא עבור איזה ערך של x אורך החוט ℓ
הוא מינימלי. מהו האורך המינימלי ?



(23) נתונה פירמידה ישרה שנפחה $2,000$ סמ"ק.
בסיס הפירמידה הוא מלבן שאורכו $2x$
ורוחבו x . מצא את אורכי צלעות
הבסיס אם ידוע שסכום גובה הפירמידה
והיקף הבסיס הוא מינימלי.

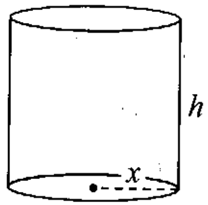


(24) נתונה פירמידה ישרה שנפחה $1,080 \cdot \sqrt{2}$ מ"ק.
בסיס הפירמידה הוא מלבן שאורכו $8x$
ורוחבו $6x$. גובה הפירמידה הוא h .
(א) הבע באמצעות x ו- h את ריבוע
האורך של מקצוע צדדי בפירמידה
(ב) מצא את מימדי בסיס הפירמידה, אם ידוע
שריבוע אורך המקצוע הצדדי שלה מינימלי.

(25) נתון גליל ישר הפתוח מלמעלה שנפחו 64π סמ"ק. אורך רדיוס בסיס הגליל הוא x.

(א) הבע באמצעות x את גובה הגליל h ואת שטח הפנים שלו P.

(ב) מצא את אורך רדיוס בסיס הגליל x שעבורו שטח הפנים P הנ"ל הוא מינימלי.

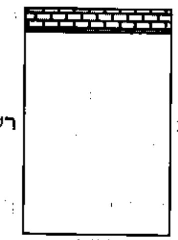


בעיות ערך קיצון	בעיות הקשורות למחירים (בעיות כלכליות)

(26) נתונה חלקה מלבנית ששטחה 800 מ"ר. בחזית החלקה ובשני צדדיה יש לבנות גדר העשויה רשת ברזל. בצד האחורי של החלקה יש לבנות גדר העשויה מאבן. מחיר מטר גדר מרשת הוא 25 ש"ח ומחיר מטר גדר מאבן הוא 75 ש"ח.

(א) מה צריכים להיות מימדי החלקה כדי שמחיר בניית הגדר סביבה יהיה מינימלי ?

(ב) מצא את המחיר המינימלי.



תשובות

(1) $x =$ 12 קמ"ש

הערה: למקרה הכללי שבו : $AC = a$ ו- $BC = 2a$ והמהירות בקטע AC היא $(v-x)$ ובקטע BC היא $(v+2x)$, אז במינימום מתקיים ש- $x = \frac{1}{4}\cdot v$.

(2) הערך המינימלי של המכפלה הוא 16 והוא מתקבל כאשר $x = y = 4$.

(3) $y = 10$, $x = 2.5$

(4) (א) $(x\cdot y)_{\min} = 4$ (ב) $(x+y)_{\min} = 4.5$

(5) $y = 4$, $x = 2$

(6) $y = 4.25$, $x = -0.25$

(7) (א) $AB_{\min} = 5$, $B(4,-1)$, $A(4,4)$

(8) (א) $AB_{\min} = 8$, $B(5,1)$; $A(5,9)$

(11) (א) $A(1,3)$ (ב) $A(13,0)$ (12) $A(3,\frac{1}{12})$, $S_{max}=\frac{1}{4}$

(13) (א) $x=\sqrt{2}$, $y=\frac{3\sqrt{2}}{16}\cdot x-\frac{1}{8}$ (ב) $x=-\sqrt{2}$, $y=-\frac{3\sqrt{2}}{16}\cdot x-\frac{1}{8}$

(14) (א) $a=9$ (ב) $P_{min}=32$

(15) (א) $CF=\frac{144}{x}$ (ב) $AB=$ 18 ס"מ , $BC=$ 32 ס"מ

(ג) $AB=$ 21 ס"מ , $BC=$ 28 ס"מ

(16) 24 ס"מ, 24 ס"מ.

(17) (א) $ED=\sqrt{3}\cdot(6-x)$ (ב) $x=$ 3 ס"מ

(18) (א) $BF=\frac{10\cdot(16-x)}{x}$ (ב) $AE=$ $\sqrt{128}=8\cdot\sqrt{2}$ ס"מ

(19) $S_{min}=40$

(20) (א) $h=\frac{13.5}{x^2}$, $P=x^2+\frac{54}{x}$

(ב) צלע הבסיס: 3 ס"מ. הגובה: 1.5 ס"מ.

(ג) $P_{min}=$ 27 סמ"ר

(21) (א) $h=\frac{8,000}{x^2}$, $\ell=8x+\frac{32,000}{x^2}$

(ב) $x=$ 20 מטר (ג) $\ell_{min}=$ 240 מטר

(22) (א) $h=\frac{8}{x}$, $\ell=6x+\frac{24}{x}$ (ב) $x=$ 2 ס"מ , $\ell_{min}=$ 24 ס"מ

(23) 10 ס"מ, 20 ס"מ.

(24) (א) $25x^2+h^2$ (ב) 24 ס"מ, 18 ס"מ.

(25) (א) $h=\frac{64}{x^2}$, $P=\pi\cdot x^2+\frac{128\pi}{x}$ (ב) $x=$ 4 ס"מ

(26) (א) רוחב (חזית האבן): 20 מטר, אורך: 40 מטר. (ב) 4,000 ש"ח.